Epreuve Semestrielle (1h.45mn)

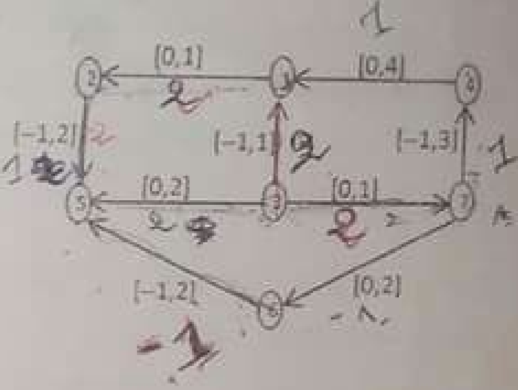
Exercice 1 (7 pts) . On rappelle le Théorème de Hoffman pour l'existence d'un flot compatible dans un réseau R donné : *Un réseau $R = (X, U, b, c)$ admet un flot compatible si et seulement si*

$\forall x \in X, \sum_{u \in W^-(x)} b(u) \leq \sum_{u \in W^+(x)} c(u)$.

1. Soit f un flot défini sur R.

- Montrer que si f est compatible alors $\forall x \in X, \sum_{u \in W^-(x)} b(u) \leq \sum_{u \in W^+(x)} c(u)$.

2. On considère le réseau R ci-contre où les arcs sont munis d'intervalles de capacités



a) Vérifier que R admet un flot compatible.

b) Déterminer un flot f dans R tel que : $f(12) = 2, f(65) = -1, f(37) = 2$.

c) Trouver alors un flot compatible, à partir du flot f trouvé en b).

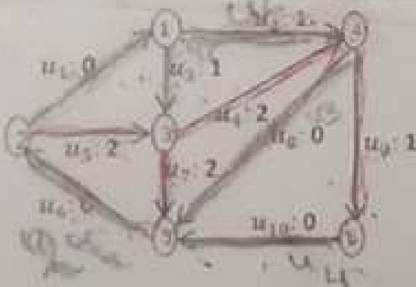
Exercice 2 (8pts).

1. Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, un arbre A est un graphe partiel de G, connexe et sans cycle.

- Décrire un algorithme qui permet de construire un arbre A dans G, puis une base de cycles associée à A.

Soit le graphe $G = (X, U)$ ci-dessous, où les arcs sont munis de poids.

- En appliquant l'algorithme de PRIM, trouver un arbre A de poids minimum dans G.
- Déterminer une base de cycles associée à A et une base de cocycles associée au coarbre $G \setminus A$.



Exercice 3 (5 pts). Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, une arborescence $T = (X, F)$ est un arbre muni d'une racine r.

- Montrer que T est une arborescence dans G si et seulement si pour chaque sommet $x \neq r$, il existe un unique chemin de r à x dans T.

Soit $T = (X, F)$ une arborescence. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble de sommets X comme suit :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ ou \\ |V_T^-(x) \cap V_T^-(y)| = 1 \end{cases}$$

- Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans T (réflexive, symétrique et transitive).
- Trouver les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ dans l'arborescence ci-contre.